13эл математика 16.12.23

Тема: «Простейшие задачи в координатах»

50 Угол между векторами

Возьмем два произвольных вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Отложим от какой-нибудь точки O векторы $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$. Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не являются сонаправленными, то лучи OA и OB образуют угол AOB (рис. 133). Градусную меру этого угла обозначим буквой α и будем говорить, что **угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен** α. Если же векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сонаправлены, в частности один из них или оба нулевые, то будем считать, что угол между ними равен $0°$. Если угол между векторами равен $90°$, то векторы называются **перпендикулярными**. Угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается так: $\widehat{\vec{a}\vec{b}}$.

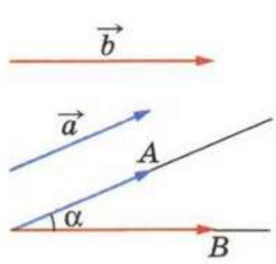


Рис. 133

На рисунке 134 изображено несколько векторов. Углы между ними таковы: $\widehat{\vec{a}\vec{b}} = 30°$, $\widehat{\vec{a}\vec{c}} = 120°$, $\widehat{\vec{a}\vec{d}} = 60°$, $\widehat{\vec{b}\vec{c}} = 90°$, $\widehat{\vec{d}\vec{f}} = 0°$, $\widehat{\vec{d}\vec{c}} = 180°$. На этом рисунке $\vec{b} \perp \vec{c}$, $\vec{b} \perp \vec{d}$, $\vec{b} \perp \vec{f}$.

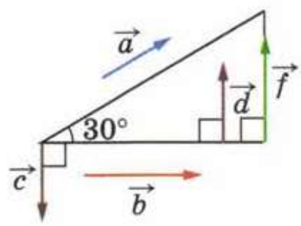


Рис. 134

51 Скалярное произведение векторов

Скалярным произведением двух векторов называется произведение их длин на косинус угла между ними. Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается так: $\vec{a}\vec{b}$. Таким образом,

$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\widehat{\vec{a}\vec{b}}).$$

Как и в планиметрии, справедливы следующие утверждения:

скалярное произведение ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда эти векторы перпендикулярны;

Косинус угла α между ненулевыми векторами $\vec{a}\,\{x_1; y_1; z_1\}$ и $\vec{b}\,\{x_2; y_2; z_2\}$ вычисляется по формуле

$$\cos\alpha = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}. \qquad (1)$$

В самом деле, так как

$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\alpha,$$

то

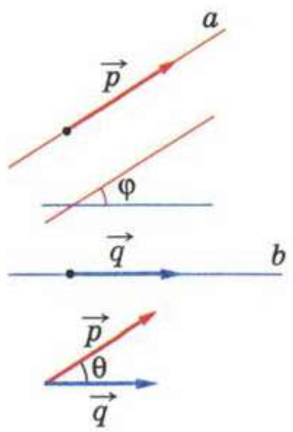
$$\cos\alpha = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}.$$

Задача 1

Найти угол между двумя прямыми (пересекающимися или скрещивающимися), если известны координаты направляющих векторов этих прямых.

Решение

Пусть $\vec{p}\,\{x_1;\ y_1;\ z_1\}$ и $\vec{q}\,\{x_2;\ y_2;\ z_2\}$ — направляющие векторы прямых a и b. Обозначим буквой φ искомый угол между этими прямыми. Для решения задачи достаточно найти $\cos\varphi$, так как значение $\cos\varphi$ позволяет найти угол φ.



Введем обозначение: $\theta = \widehat{\vec{p}\,\vec{q}}$. Тогда либо $\varphi = \theta$, если $\theta \leqslant 90°$ (рис. 136, *а*), либо $\varphi = 180° - \theta$, если $\theta > 90°$ (рис. 136, *б*).

Поэтому либо $\cos\varphi = \cos\theta$, либо $\cos\varphi = -\cos\theta$. В любом случае $|\cos\varphi| = |\cos\theta|$, а так как $\varphi \leqslant 90°$, то $\cos\varphi \geqslant 0$, и, следовательно, $\cos\varphi = |\cos\theta|$. Используя формулу (1) п. 51, получаем

$$\cos\varphi = \frac{|x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}. \qquad (2)$$

26

Даны векторы $\vec{a}\,\{4;\ 0;\ 0\}$ и $\vec{b}\,\{1;\ 0;\ -\sqrt{3}\}$. Найдите: а) $\vec{a}\vec{b}$; б) $\vec{b}\vec{a}$; в) $\vec{a}^2$; г) $|\vec{b}|$; д) $\widehat{\vec{a}\vec{b}}$.

Решение.

а) $\vec{a}\vec{b} = 4\cdot \underline{\quad\quad} + \underline{\quad\quad\quad\quad} + \underline{\quad\quad\quad\quad} = \underline{\quad\quad}$

б) По ______________________________ закону скалярного ____________ ________ векторов имеем $\widehat{\vec{b}\vec{a}} = \underline{\quad\quad\quad} = \underline{\quad\quad}$

в) $\vec{a}^2 = \vec{a}\cdot \underline{\quad\quad} = 4\cdot \underline{\quad\quad} + \underline{\quad\quad\quad\quad} + \underline{\quad\quad\quad\quad} = \underline{\quad\quad\quad}$

г) $|\vec{b}| = \sqrt{\underline{\quad\quad\quad}}$, где $\vec{b}^2 = 1^2 + \underline{\quad\quad\quad} + (\underline{\quad\quad\quad})^2 = \underline{\quad\quad}$. Следовательно, $|\vec{b}| = \sqrt{\underline{\quad\quad}} = \underline{\quad\quad}$

д) $\cos\widehat{\vec{a}\vec{b}} = \dfrac{|4\cdot \underline{\quad} + \underline{\quad\quad\quad\quad} + \underline{\quad\quad\quad\quad}|}{\sqrt{4^2 + \underline{\quad\quad} + \underline{\quad\quad}}\cdot 2} = \dfrac{\underline{\quad}}{4\cdot \underline{\quad}} = \dfrac{}{\underline{\quad\quad}}$. Следовательно, $\widehat{\vec{a}\vec{b}} = \underline{\quad\quad}$